Die Addition + auf $\mathbb{Z}$ haben wir genauso definiert, wie man das in der Schule gelernt hat: Für p, $q \in \mathbb{N}_0$ ist die Summe $p+q$ von p und q in $\mathbb{Z}$ nichts anderes als ihre Summe in $\mathbb{N}_0$. Es bleiben also drei Fälle:

(1) Die Summe $m^- + n^-$ für m, $n \in \mathbb{N}$. Hier setzen wir

$$m^- + n^- = (m+n)^- \ .$$

(2) Die Summe $m^- + n$ für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Hier ist

$$m^- + n = \begin{cases} (m-n)^- & \text{falls } n < m \ , \\ n - m & \text{falls } m \leq n \ . \end{cases}$$

(3) Die Summe $m + n^-$ für $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist

$$m + n^- = \begin{cases} m - n & \text{falls } n \leq m \ , \\ (n-m)^- & \text{falls } m < n \ . \end{cases}$$

Man kann natürlich fragen, ob die Addition so definiert werden muss. Es stellt sich heraus, dass es keine andere Möglichkeit als die übliche Definition gibt, wenn man Folgendes verlangt: Die Addition soll assoziativ, die Summe von m^- und m soll gleich 0 und die Addition soll mit der Addition in $\mathbb{N}_0$ veträglich sein. Etwas genauer: Sei $\oplus$ irgendeine Operation auf $\mathbb{Z}$, für die gilt:

- (a1) $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$ für alle p, q, $r \in \mathbb{Z}$.
- (a4) $m^- \oplus m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
- (n0) $m \oplus n = m + n$ für alle m, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann folgt, dass $p \oplus q = p + q$ für all p, $q \in \mathbb{Z}$.

In den folgenden Aufgaben sollen Teile dieser Aussage nachgeprüft werden. Sei also $\oplus$ eine Operation auf $\mathbb{Z}$, für die (a1), (a4) und (n0) gilt. Über die Addition auf $\mathbb{N}_0$ darf man lediglich Folgendes verwenden:

- (A1) Für alle ℓ, m, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(\ell + m) + n = \ell + (m+n)$.
- (A2) Für alle m, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $m + n = n + m$.
- (A3) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $0 + m = m$.

In den Aufgaben 29, 30 und 31 seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

29. Man zeige: Es gilt $(m \oplus n^-) \oplus n = m$.

30. Nehme an, dass $m \oplus n^- \in \mathbb{N}_0$. Man zeige:

(1) Es gilt $m = n + (m \oplus n^-)$.

(2) Es gilt $m \oplus n^- = m + n^-$.

31. Nehme an, dass $m \oplus n^- \in \mathbb{N}^-$. Es gibt also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m \oplus n^- = k^-$. Man zeige:

(1) Es gilt $m + k = n$.

(2) Es gilt $m \oplus n^- = m + n^-$.

Nach den Aufgaben 29, 30 und 31 gilt $m \oplus n^- = m + n$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ (da entweder $m \oplus n^- \in \mathbb{N}_0$ oder $m \oplus n^- \in \mathbb{N}^-$).

32. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es gilt $(m^- \oplus n^-) \oplus (m + n) = 0$.

Aus Aufgabe 32 folgt, dass $m^- \oplus n^- = m^- + n^-$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$: Zunächst ist $m^- + n^- \in \mathbb{N}_0$ nicht möglich, da dann nach Aufgabe 32 wäre

$$0 = (m^- \oplus n^-) \oplus (m + n) \overset{\text{(n0)}}{=} (m^- \oplus n^-) + (m + n)$$

und nach Aufgabe 25 (1) ist $(m^- \oplus n^-) + (m + n) \neq 0$, da $m + n \in \mathbb{N}$. Also ist $m^- + n^- \in \mathbb{N}^-$ und daher gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m^- \oplus n^- = k^-$. Folglich ist nach Aufgabe 32 $k^- \oplus (m + n) = 0$ und daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} k \overset{\text{(A3)}}{=} 0 + k \overset{\text{(n0)}}{=} {} & 0 \oplus k = (k^- \oplus (m+n)) \oplus k \\ \overset{\text{(a1)}}{=} {} & k^- \oplus ((m+n) \oplus k) \overset{\text{(n0)}}{=} k^- \oplus ((m+n) + k) \\ \overset{\text{(A2)}}{=} {} & k^- \oplus (k + (m+n)) \overset{\text{(n0)}}{=} k^- \oplus (k \oplus (m+n)) \\ \overset{\text{(a1)}}{=} {} & (k^- \oplus k) \oplus (m+n) \overset{\text{(a4)}}{=} 0 \oplus (m+n) \\ \overset{\text{(n0)}}{=} {} & 0 + (m+n) \overset{\text{(A3)}}{=} m + n \ , \end{aligned}$$

d.h. $m^- \oplus n^- = k^- = (m + n)^-$, und insbesondere ist $m^- \oplus n^- = m^- + n^-$.

Nach (n0) gilt $m \oplus n = m + n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$. Wenn wir also zeigen können, dass $m^- \oplus n = m^- + n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann hätten wir gezeigt, dass

$$p \oplus q = p + q$$

für alle p, $q \in \mathbb{Z}$. Dieser letzte Fall ist ähnlich zum ersten in den Aufgaben 29, 30 und 31 behandelten Fall: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$; dann ist

$$\begin{aligned}(m^- \oplus n) \oplus m &\overset{\text{(a1)}}{=} m^- \oplus (n \oplus m) \overset{\text{(n0)}}{=} m^- \oplus (n + m)\\ &\overset{\text{(A2)}}{=} m^- \oplus (m + n) \overset{\text{(n0)}}{=} m^- \oplus (m \oplus n)\\ &\overset{\text{(a1)}}{=} (m^- \oplus m) \oplus n \overset{\text{(a4)}}{=} 0 \oplus n \overset{\text{(n0)}}{=} 0 + n \overset{\text{(A3)}}{=} n\ .\end{aligned}$$

(Dies entspricht der Rechnung in Aufgabe 29, die aber kürzer ist.)

Ist $m^- \oplus n \in \mathbb{N}_0$, so folgt genauso wie in Aufgabe 30, dass $n = m + (m^- \oplus n)$. Folglich ist $m \leq n$ und $m^- \oplus n = n - m$ und daher ist $m^- \oplus n = m^- + n$.

Ist dagegen $m^- \oplus n \in \mathbb{N}^-$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m^- \oplus n = k^-$ und dann ist $n = k^- \oplus m$. Genauso wie in Aufgabe 31 ist dann $n + k = m$; Folglich ist $n < m$ und $k = m - n$ und daher ist $m^- \oplus n = m^- + n$.

Dies zeigt, dass $m^- \oplus n = m^- + n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (da entweder $m^- \oplus n \in \mathbb{N}_0$ oder $m^- \oplus n \in \mathbb{N}^-$).